AS EQUAÇÕES DO MOVIMENTO DE UMA CARGA EM PRESENÇA DE UM CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Conhecido S, as equações do movimento serão tais que $\delta S = 0$ (V. Ap. 2 e 3). Então:

$$\delta S = \delta \int \left(\frac{m v^2}{2} + \frac{e}{c} \vec{A} \vec{v} - e \varphi + L_{em} \right) dt$$

Pelo primeiro ponto de vista, $\delta L_{em} = 0$. Daí:

$$L = \frac{m v^2}{2} + \frac{e}{c} \vec{A} \vec{v} - e \varphi = L(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Pelo Ap.3, $\delta S = 0$ implica:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \quad \textbf{[Eq. 1]}$$

A impulsão (ou "quantidade" de movimento) generalizada de uma partícula, $\vec{P}$, e a força que age na partícula, $\vec{F}$, são definidas por (Cf. Bibl. 9):

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \qquad\qquad \vec{F} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

Calculando o valor de $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial L}{\partial x_i} = \nabla L = \frac{e}{c} \nabla \vec{A} \vec{v} - e \nabla \varphi \quad \textbf{[Eq. 2]}$$

pois $\vec{V}$ é constante nessa derivação. Como (V. Ap. 4):

$$\nabla(\vec{a}\vec{b}) = (\vec{a}\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\nabla)\vec{a} + \vec{b} \wedge \text{rot}\, \vec{a} + \vec{a} \wedge \text{rot}\, \vec{b}$$

então (V. Ap. 4):

$$\nabla(\vec{A}\vec{v}) = (\vec{A}\nabla)\vec{v} + (\vec{v}\nabla)\vec{A} + \vec{v} \wedge \text{rot}\, \vec{A} + \vec{A} \wedge \text{rot}\, \vec{v}$$

Sendo, ainda, $\vec{V}$ constante:

$$\nabla(\vec{A}\vec{v}) = (\vec{v}\nabla)\vec{A} + \vec{v} \wedge \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

De:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\right) + \ldots\ldots + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (\vec{v}\,\nabla)\vec{A} + \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$$

tem-se:

$$\nabla(\vec{A}\vec{v}) = \frac{d\vec{A}}{dt} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v} \wedge \mathrm{rot}\,\vec{A}$$

[Eq. 3]

Agora determine-se $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}}\left(\frac{m}{2}\vec{v}^2\right) + \left(\frac{e}{c}\vec{A}\right)\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial \vec{v}}\right) - \frac{\partial}{\partial \vec{v}}(e\varphi) = \vec{p} + \frac{e}{c}\vec{A}$$

onde $\vec{p} = m\vec{v}$ é a impulsão mecânica:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = \frac{d\vec{p}}{dt} + \frac{e}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}$$

[Eq. 4]

Substituindo a (3) na (2), e introduzindo a (2) e a (4) na (1):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_m = \left(-\frac{e}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - e\nabla\varphi\right) + \left(\frac{e}{c}\vec{v} \wedge \mathrm{rot}\,\vec{A}\right)$$

$\vec{F}_m$ é a força mecânica que age na partícula em presença de um campo eletromagnético. Esta força é composta de duas outras de tipos diferentes: a primeira depende somento do ponto onde m se encontra; a segunda depende do ponto e da velocidade. São, pois, forças de naturezas diferentes.

A existência desses dois tipos de forças, atribui-se à existência de dois entes físicos distintos, nominalmente, o campo magnético $\vec{H}$ e o campo elétrico $\vec{E}$, iguais à respectiva força por unidade de carga, e definidos por:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla\varphi$$

$$\vec{H} = \text{rot}\,\vec{A}$$ **[Eqs. 5]**

Então:

$$\vec{F}_m = e\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{v}\wedge\vec{H}\right)$$

chamada **Força de Lorentz**, e a trajetória de e é tal que satisfaz à equação diferencial:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_m$$

PRIMEIRO PAR DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

Ao se buscar, a partir de (5), relações entre $\vec{E}$ e $\vec{H}$, chega-se a:

$$\text{div}\,\vec{H} = \text{div rot}\,\vec{A} = 0$$

isto é:

$$\boxed{\text{div}\,\vec{H} = 0}$$ **[Eq. 6]**

$$\text{rot}\,\vec{E} = \text{rot}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) - \text{rot}\,\nabla\varphi = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\text{rot}\,\vec{A})$$

De (5):

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}$$ **[Eq. 7]**