APÊNDICE 4

SOBRE UM NOVO USO DO OPERADOR *NABLA* ∇

O operador *nabla* é definido, em coordenadas cartesianas ortogonais, por:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Algumas propriedades de nabla são:

1. Nabla é linear (k_i constante): $\nabla \sum k_i f_i = \sum k_i \nabla f_i$

2. $\nabla (f g) = f \nabla g + g \nabla f$

Isto sugere o seguinte: Sejam ∇f e ∇g o operador nabla operando <u>apenas</u> sobre <u>f</u> e <u>g</u>, respectivamente. Então (2) fica:

$$\nabla (f g) = \nabla_f f g + \nabla_g f g = g \nabla_f f + f \nabla_g g$$

pois $\nabla_f (f g)$ opera somente em <u>f</u> e, consequentemente, <u>g</u> passa a ser uma constante (o mesmo se diga de <u>f</u>) e, por (1):

$$\nabla_f (f g) = g \nabla_f f$$

Mas

$$\nabla_f f = \nabla f$$

Logo:

$$\nabla (f g) = g \nabla_f f + f \nabla_g g = g \nabla f + f \nabla g$$

Ainda, segundo esta notação, pode-se fazer:

$$\nabla_f (f g) = g \nabla_f f = g f \nabla_f = f \nabla_f g$$

pois ∇_f operando <u>apenas</u> sobre <u>f</u> pode comutar <u>f</u> e <u>g</u>, uma vez que nenhuma ambiguidade advirá daí. Somente deverá ser tomada atenção quando se passar para a notação convencional (nabla sem índice), pois aí nabla operará apenas no que estiver à sua direita.

Entretanto, nabla, na sua definição formal dada acima, tem o aspecto de um vetor. Acabou-se de ver, também, que esse "vetor" é comutativo, desde que introduzida a notação indicial. Surge, então, uma pergunta:

"Não poderá o nabla indexado ser tratado simplesmente como um vetor ordinário e sujeito às leis de operações vetoriais comuns? E, depois desse tratamento, não será possível arranjar o nabla indexado na expressão de tal forma que se possa voltar, sem ambiguidade, à notação não indexada?

Seja um exemplo:

$$\mathrm{div}\,\varphi\vec{A}$$

onde φ é uma função e $\vec{A}$ um vetor.

$$\mathrm{div}\,\varphi\vec{A} = \nabla\left(\varphi\vec{A}\right)$$

Aqui nabla está se apresentando com "roupagem" de um vetor, pois está sendo multiplicado escalarmente por $\varphi\vec{A}$. Que seja, então, mantida essa "roupagem", procurando ver o que sucede a $\nabla(\varphi\vec{A})$ quando se utiliza o acima exposto.

Então:

$$\nabla\left(\varphi\vec{A}\right) = \nabla_{\varphi}\left(\varphi\vec{A}\right) + \nabla_{\vec{A}}\left(\varphi\vec{A}\right)$$

Com esta notação indexada, ∇_{φ} e $\nabla_{\vec{A}}$ podem ser encarados como vetores comuns.

Ora, sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores quaisquer e α um escalar, então:

$$\vec{a}\left(\alpha\vec{b}\right) = \alpha\left(\vec{a}\,\vec{b}\right) = \left(\alpha\vec{a}\right)\vec{b} = \left(\vec{a}\,\alpha\right)\vec{b}$$

Usando essa relação:

$$\nabla\left(\varphi\vec{A}\right) = \left(\nabla_{\varphi}\varphi\right)\vec{A} + \varphi\left(\nabla_{\vec{A}}\vec{A}\right)$$

Voltando a encarar nabla como operador:

$$\nabla\left(\varphi\vec{A}\right) = \vec{A}\left(\nabla_{\varphi}\varphi\right) + \varphi\left(\nabla_{\vec{A}}\vec{A}\right)$$

Mas, sem ambiguidade, pode-se voltar à notação anterior, pois nabla está operando sobre aquilo que <u>já está</u> à sua direita. Assim:

$$\nabla\left(\varphi\vec{A}\right)=\vec{A}\left(\nabla\varphi\right)+\varphi\left(\nabla\vec{A}\right)$$

Como

$$\nabla\varphi=\text{grad}\varphi$$

$$\nabla\vec{A}=\text{div}\vec{A}$$

então

$$\text{div}\left(\varphi\vec{A}\right)=\vec{A}\,\text{grad}\varphi+\varphi\,\text{div}\vec{A}$$

Mas essa igualdade exprime, <u>exatamente</u>, o desenvolvimento de $\text{div}(\varphi\vec{A})$.

Vê-se, então, que as perguntas acima formuladas têm sentido e, antes de tudo, <u>funcionam</u>.

Seja um outro exemplo:

$$\text{rot rot}\vec{A}$$

Como anteriormente:

$$\text{rot rot}\vec{A}=\nabla\wedge\left(\nabla\vec{A}\right)=\nabla_{\vec{A}}\wedge\left(\nabla_{\vec{A}}\wedge\vec{A}\right)$$

Sendo

$$\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=\vec{b}\left(\vec{a}\vec{c}\right)-\vec{c}\left(\vec{a}\vec{b}\right)$$

vem

$$\text{rot rot}\vec{A}=\nabla_{\vec{A}}\wedge\left(\nabla_{\vec{A}}\vec{A}\right)-\left(\nabla_{\vec{A}}\nabla_{\vec{A}}\right)\vec{A}$$

ou

$$\text{rot rot}\vec{A}=\nabla\left(\nabla\vec{A}\right)-\left(\nabla\nabla\right)\vec{A}=\text{grad div}\,\vec{A}-\nabla^2\vec{A}$$

Ora, nabla ao quadrado é o laplaciano de um vetor, definido como (Cf. bibl. 12, p. 68):

$$\nabla^2\vec{A}=\text{rot rot}\,\vec{A}-\text{grad div}\,\vec{A}$$

Como se vê, novamente o "vetor nabla" deu resultados corretos.

Outros exemplos de que nabla conduz a resultados positivos podem ser encontrados nas bibl. (7), vol 2, p. 27.4, e (10), p. 101.

Observação:

A notação indexada de nabla não deve ser introduzida em casos onde haja possibilidade de aparecimento de expressões ambíguas. Tal é o caso onde se tenha termos do tipo $(\nabla f)^n$, onde n̲ é diferente de 1 e f̲ é uma função qualquer. De fato, seja o exemplo $(\nabla f)^2$. Passando para a notação indexada:

$$(\nabla f)^2 = (\nabla f)(\nabla f) = (\nabla_f f)(\nabla_f f) = \nabla_f \nabla_f f f = \nabla_f^2 f^2 = \left(\nabla^2\right) f^2$$

Como é fácil mostrar:

$$(\nabla f)^2 \neq \left(\nabla^2\right) f^2$$

****