APÊNDICE 2

O OPERADOR VARIAÇÃO δ

Uma trajetória no espaço vetorial euclidiano, onde o vetor posição é dado por

$$\vec{r} = (x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z) = (x_i), \ i = 1,2,3$$

é caracterizada por um conjunto de pontos dados por

$$r(t) = [x_i(t)]$$

isto é, uma aplicação bijetora e contínua (no caso de uma curva suave) na qual a cada número real t se associa um conjunto de números $x_i(t)$ reais que, por sua vez, constituem as três coordenadas do vetor $\vec{r}$, determinante dos pontos P(t) da trajetória nesse espaço.

Sejam dados agora os seguintes elementos: duas trajetórias $r_i = r_i(t)$ (i=1,2) e duas aplicações bijetoras (i = 1, 2):

$$f_i = f[r_i(t)]$$

e

$$g_i = g[r_i(t)]$$

DEFINIÇÃO:

Chama-se variação (ou mais precisamente, primeira variação) de uma função f_1 o resultado da operação matemática de um operador δ sobre f_1 tal que

$$\delta f_1 = f_1 - f_2$$

para cada valor pré-fixado de t.

O operador variação é simbolizado por δ (devido a Lagrange) para enfatizar a diferença entre ele e o operador diferencial d, embora, como será visto, eles podem se confundir formalmente: enquanto d reflete a parte linear do acréscimo de f_i para uma dada trajetória, δ refere-se à variação de f_i sobre duas trajetórias diferentes para o mesmo valor de t. (V. figura abaixo)

PROPRIEDADES DO OPERADOR δ:

1. δ é linear:

$$\delta \alpha (f_1 + g_1) = \alpha (\delta f_1 + \delta g_1)$$

Imediato. Alfa é um escalar.

2. Os operadores d e δ são comutativos: d δ = δ d

$$d(\delta f_1) = d(f_1 - f_2) = d f_1 - d f_2 = \delta(d f_1)$$

Consequência imediata:

$$(d/dt)(\delta f_1) = \delta(df_1/dt)$$

3. Os operadores Variação e Integral Definida, com as condições de contorno do Cálculo das Variações, são comutativos:

$$\delta \int_a^b = \int_a^b \delta$$

Demonstração:

No Cálculo das Variações, sempre se estabelecem as seguintes condições de contorno:

$$\vec{r}_1(a) = \vec{r}_2(a) \quad \text{e} \quad \vec{r}_1(b) = \vec{r}_2(b)$$

Assim, para

$$t = a, b$$

tem-se

$$g_1 = g_2$$

Então:

$$\delta \int_\alpha^\varepsilon f_1\, dg_1 = \int_\alpha^\varepsilon f_1\, dg_1 - \int_{\alpha'}^{\varepsilon'} f_2\, dg_2 = \int_\alpha^\varepsilon (f_1\, dg_1 - f_2\, dg_2) = \int_\alpha^\varepsilon \delta(f_1\, dg_1)$$

4. A função δf_1 é arbitrária.

Não foi feita qualquer restrição quanto à relação entre as trajetórias $\vec{r}_i(t)$ e, de fato, apenas uma trajetória é pré-fixada e considerada como realmente válida (*true path*, que representa um fenômeno real), sendo a outra completamente arbitrária, desde que sejam mantidas as condições de contorno, i.e., as trajetórias deverão ter, no mínimo, um número finito deles.

Resulta daí que δf_1 é igualmente arbitrária. Isso trará inúmeras vantagens (como a propriedade a seguir).

5. $$\delta f = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\delta x_k \qquad f_i = f[r_i(t)] = f(x_{ik}) \qquad k = 1,2,3$$

Devido à arbitrariedade da função δf_1 esta poderá ser expressa em termos de outras variáveis igualmente arbitrárias:

$$\delta x_{ik} = x_{1k} - x_{2k}$$

que se revelará de grande utilidade no Cálculo das Variações. Assim, sendo:

$$\delta f_1 = f_1(x_{1k}) - f_2(x_{2k})$$

faça-se:

$$\delta f_1 = \sum_k \frac{\partial f_1}{\partial x_{1k}}\delta x_{1k} \qquad k = 1,2,3$$

Note-se que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_{1k}}$$

depende apenas do valor de <u>t</u> e, portanto, é fixo em relação à variação δx_{1K}.

Com esta redefinição de δf_1 não mais será preciso se referir a duas trajetórias, mas somente a uma delas (*true path*) e encarar a variação como sendo

$$\delta f = \sum_k \frac{\partial f}{\partial x_k}\delta x_k \qquad k = 1,2,3$$

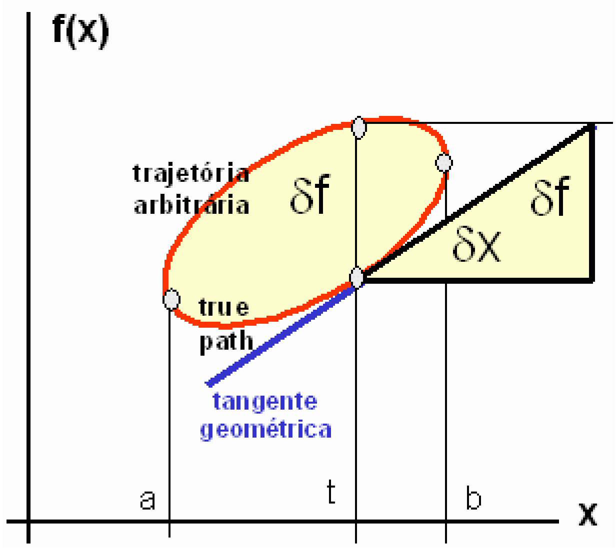
Consequentemente, δ passa a ser, formalmente, semelhante ao operador <u>d</u> e, como tal, sendo válido, por exemplo:

$$\delta(f.g) = f\,\delta g + g\,\delta f$$

e

$$\delta(f\,dx) = (\delta f)dx + f\,\delta(dx) = (\delta f)dx + f\,d(\delta x)$$

Dá-se, a seguir, uma interpretação geométrica do que foi acima exposto.


f(x)
trajetória
arbitrária
δf
δf
δx
true
path
tangente
geométrica
a
t
b
x

****