APÊNDICE 3

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO DAS VARIAÇÕES:
A EQUAÇÃO DE EULER

Definição 1:

Seja $L = L(\vec{r}, \vec{v}, t)$ uma função contínua e diferenciável em um conjunto de pontos, com $\vec{r} = [x_i(t)]$ e $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$.

Seja um campo (bijeção: ponto do espaço -> número real) ao qual é associada uma função L, chamada ***Lagrangeano do Campo*** (ou ***Função de Lagrange***).

Chama-se ***Ação S do Campo*** considerado, a função:

$$S = \int_b^a L\, dt$$

Definição 2:

Chama-se ***derivada de uma função L em relação a um vetor*** $\vec{r}$ (quaisquer que sejam L e $\vec{r}$) o vetor:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = \left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1};\ldots\ldots\ldots;\frac{\partial L}{\partial x_n}\right)$$

O problema fundamental do Cálculo das Variações é:

Dada uma ação S e as condições de contorno, determinar a trajetória $\vec{r}(t)$ tal que S seja estacionária (normalmente, que atinja um valor mínimo) no intervalo [a, b], a cujos extremos são referidas as condições de contorno.

A variação de S, quando sujeita a uma variação $\delta(\vec{r})$ da trajetória é:

$$\int_a^b L(\vec{r} + \delta\vec{r}; \vec{v} + \delta\vec{v}; t)\,dt - \int_a^b L(\vec{r}; \vec{v}; t)\,dt$$

Esta expressão pode ser desenvolvida pelo Teorema do Valor Médio generalizado (Teorema de Taylor Generalizado) (Cf. Bibl. 3). Sendo

$$D_k = \left(\delta\vec{r}\,\frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \delta\vec{v}\,\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \right)^k$$

desenvolvível pelo Binômio de Newton, ter-se-á que a variação de S será igual a:

$$\int_a^b \left(\sum_k \frac{1}{k!} D_k L \right) dt + \frac{1}{(k+1)!} D_{k+1} L_r \, dt \qquad \textbf{[Eq. 1]}$$

Definição 3:

Chama-se (k $^{\text{ésima}}$) variação de S a (k $^{\text{ésima}}$) parcela da expressão (1).

Teorema:

A condição necessária para que S seja estacionária é que a sua primeira variação δS seja identicamente nula. (Dem. na bibl. 6).

Tomando então a primeira variação de S em (1), vem

$$\int_a^b \left(\delta\vec{r}\,\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} + \delta\vec{v}\,\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) dt = \int_a^b (\delta L)\, dt = \delta \int_a^b L\, dt = \delta S$$

Então, pelo teorema acima, o problema fundamental do Cálculo das Variações pode ser resumido em $\delta S = 0$, satisfeitas as condições de contorno.

Teorema:

A condição necessária para que $\delta S = 0$, sujeita às condições de contorno

$$\delta\vec{r}(a) = \delta\vec{r}(b) = 0$$

é que seja satisfeita a equação de Euler:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

Demonstação:

$$\delta S = \delta \int_a^b L\, dt = \int_a^b \left(\delta\vec{r}\,\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} + \delta\vec{v}\,\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} + \delta t\,\frac{\partial L}{\partial t} \right) dt$$

Quando se efetua a variação de S, $\delta t = 0$ (pela própria definição de variação), donde:

$$\delta S = \int_a^b \left(\delta\vec{r}\,\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} + \delta\vec{v}\,\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} \right) dt$$

Sendo:

$$\frac{d}{dt}\delta\vec{r} = \delta\frac{d\vec{r}}{dt} = \delta\vec{v}$$

$$\delta S = \int_a^b \left(\delta\vec{r}\,\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\frac{d}{dt}\delta\vec{r} \right) dt$$

Integre-se o segundo termo por partes:

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} d(\delta\vec{r}) = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\delta\vec{r}\Big|_a^b - \int_a^b d\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)\delta\vec{r} = -\int_a^b d\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right)\delta\vec{r}$$

pelas condições de contorno. Assim, pelo teorema anterior:

$$\delta S = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) \right] \delta\vec{r}\; dt = 0$$

Pela arbitrariedade do vetor $\delta(\vec{r})$, conclui-se que o termo entre colchetes deverá ser nulo, pois, do contrário, poder-se-ia escolher vetores $\vec{r}$ tais que $\delta(\vec{r})$ multiplicado escalarmente pelo vetor entre colchetes fosse sempre um número positivo e, pela definição de integral, esta não seria nula. A condição de ortogonalidade entre $\delta(\vec{r})$ e o outro vetor também conduz à mesma tese. Então:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}}$$

q.e.d.

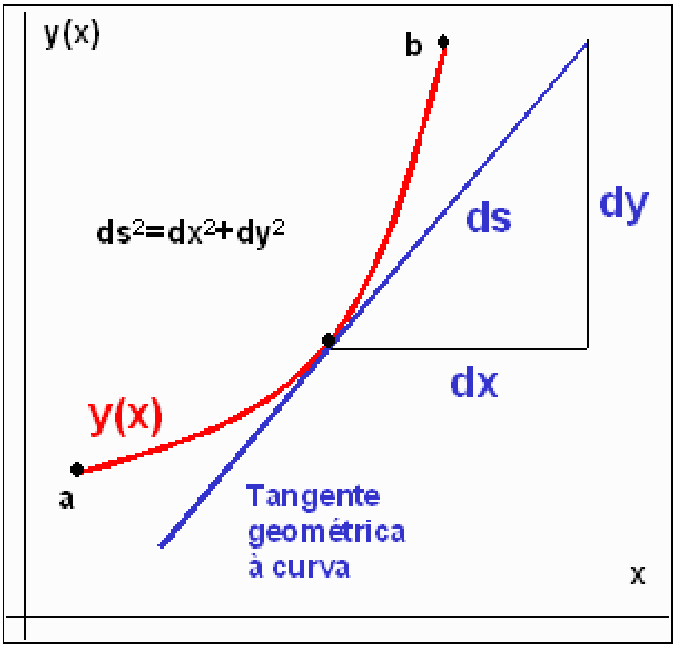
Exemplo de Aplicação:

Mostre que a menor distância entre dois pontos é aquela medida sobre uma linha reta.

Solução:

A distância **s**, entre dois pontos dados **[a, b]**, medida sobre uma curva genérica **y(x)** é dada por:

$$s = \int_a^b \left[\sqrt{1+(y')^2}\right] dx$$



Sendo

$$L(x) = \sqrt{1+(y')^2}$$

a equação de Euler fica:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0$$

Calculando:

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{y'y''}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = \frac{y' y''}{\sqrt{\left(1 + (y')^2\right)^3}}$$

Logo, a equação da reta [y = cx + d] satisfaz a equação de Euler, pois y" = 0.

****