O CAMPO ELETROMAGNÉTICO ORIUNDO DE UM MOVIMENTO DE CARGAS

Adotar-se-á agora o **segundo** ponto de vista. Antes porém é necessário introduzir algumas definições, com o intuito de se determinar o campo oriundo de uma distribuição de cargas, que é o caso mais geral. Tais considerações não foram feitas anteriormente por serem desnecessárias (note-se que as equações acima encontradas não contêm qualquer referência a cargas).

Considere-se um movimento de cargas e segundo as trajetórias já determinadas. Seja $\vec{V}$ a velocidade de cada carga em cada ponto, e ρ a densidade dessas cargas. definida, em cada ponto, por:

$$\rho = \frac{de}{d\forall}$$

(hipótese do contínuo), onde de é a carga total localizada no volume $d\forall$. Daí:

$$de = \rho \, d\forall$$

O vetor densidade de corrente é definido por:

$$\vec{j} = \rho \vec{V}$$

Pelas definições (5) vê-se que o campo é caracterizado completamente pelos vetores $\vec{E}\ \vec{H}$. Assim, o lagrangeano L_{em} deve conter $\vec{E}\ \vec{H}$; e

$$L_{em} = 2a \iiint_{\forall} \left(\vec{H}^2 - \vec{E}^2 \right) d\forall$$

A quantidade $\vec{H}\vec{H} - \vec{E}\vec{E}$ é o único invariante do tensor do campo $T_{ij}^{\ 2}$ e como tal deve comparecer em L_{em}; a sua dedução teórica não será apresentada aqui.

A constante a caracteriza o sistema de unidades adotado para medir o campo. Usando-se o sistema de Gauss,

$$a = -\frac{1}{16\pi}$$

adimensional (V.Ap.1). Então:

$$L_{em} = \frac{1}{8\pi} \iiint_{\forall} \left(\vec{E}^2 - \vec{H}^2 \right) d\forall$$

Retome-se a ação total S. Como a carga e foi considerada continuamente distribuída em um volume $\forall$ deve-se substituir, em $\mathbf{L_{mg}}$, e por de, obtendo-se então:

$$dL_{mg} = \frac{\vec{A}\vec{v}}{c}de = \frac{\vec{A}\vec{v}}{c}\rho d\forall$$

ou

$$L_{mg} = \iiint_{\forall} \frac{\vec{A}\vec{j}}{c} d\forall$$

Analogamente, para $\mathbf{L_e}$:

$$L_e = \iiint_{\forall} (-\rho\varphi) d\forall$$

Ao se variar a ação S, supor-se-á que a trajetória seja fixada (*true path*). Então, não variarão: o vetor $\vec{j}$ e a velocidade $\vec{V}$ (em cada ponto). Assim, S toma a forma:

$$S = \int_b^a \left[\iiint_{\forall} \left(\frac{\vec{A}\vec{j}}{c} - \rho\varphi + \frac{\vec{E}^2 - \vec{H}^2}{8\pi} \right) d\forall \right] dt$$

onde $\mathbf{L_m}$ foi eliminado por não variar ($\delta L_m = 0$). Daí, utilizando-se (5), tem-se:

$$S = \int_b^a \iiint_{\forall} \left[\frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla\varphi \right)^2 - \frac{1}{8\pi} \left(\text{rot}\vec{A} \right)^2 + \frac{\vec{A}\vec{j}}{c} - \rho\varphi \right] d\forall\, dt$$

Sendo L o lagrangeano de S,

$$\delta S = 0 \Leftrightarrow \delta L = 0$$

(V. Ap. 2) e

$$L = L(\vec{A}; \varphi)$$

então:

$$0 = \delta L = \frac{\partial L}{\partial \vec{A}} \delta\vec{A} + \frac{\partial L}{\partial \varphi}\delta\varphi$$

implica

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{A}} = \vec{0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

pois

$$\delta \vec{A} \quad \text{e} \quad \delta \varphi$$

são arbitrários e independentes.

Então, pode-se variar S mantendo $\vec{A}$ constante e, depois, φ constante.

É necessário ainda estabelecer as condições de contorno do Cálculo das Variações. Para tanto, admitir-se-á que o campo é nulo no infinito. Fisicamente, isto significa que está se levando em consideração todo o campo existente no universo originado pelo movimento das cargas (note-se que isto implica que o volume é infinito). Além do mais, as variações do campo em a e b são nulas pela própria natureza do Cálculo das Variações (o campo é dado nesses pontos).

Assim, sendo δ_φ a variação de φ somente, vem:

$$\delta_\varphi S = 0 \Rightarrow \delta_\varphi L = 0 = \iiint_\forall \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \nabla \varphi \right) \nabla \delta \varphi - \rho \delta \varphi \right] d\forall$$

Usando (5):

$$\iiint_\forall \left(\frac{\vec{E}}{4\pi} \nabla \delta \varphi - \rho \delta \varphi \right) d\forall = 0$$

Pelo Ap. 4:

$$\nabla (f \vec{a}) = \vec{a} \nabla f + f \nabla \vec{a}$$

donde:

$$\iiint_\forall \left[- \frac{\nabla \left(\vec{E} \delta \varphi \right)}{4\pi} + \left(\frac{\nabla \vec{E}}{4\pi} - \rho \right) \delta \varphi \right] d\forall = 0$$

Pelo teorema de Gauss-Ostrogadsky, o primeiro membro se torna, pelas condições de contorno:

$$-\frac{1}{4\pi}\oiint\left(\vec{E}\,\delta\varphi\right)d\vec{s}=0$$

Sendo, ainda, δ_{φ} arbitrário:

$$\iiint_{\forall}\left(\frac{\nabla\vec{E}}{4\pi}-\rho\right)\delta\varphi\ d\forall=0$$

o que implica:

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{E}=4\pi\rho}$$

que é a terceira equação de Maxwell.

Finalmente, seja S operado segundo $\delta_{\vec{A}}$:

$$\delta_{A}S=0=\int(\delta_{A}L)dt$$

$$\delta_{A}L=\iiint_{\forall}\left(\begin{array}{l}\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\nabla\varphi\right)\left(\frac{1}{c}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vec{A}}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)\delta\vec{A}\right]-\\ \frac{1}{4\pi}\left(\mathrm{rot}\vec{A}\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial\vec{A}}\mathrm{rot}\vec{A}\right)\delta\vec{A}\right]+\frac{\vec{j}}{c}\left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial\vec{A}}\delta\vec{A}\right)\end{array}\right)d\forall$$

$$\partial_{A}L=\iiint_{\forall}\left[-\frac{1}{4\pi c}\vec{E}\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\vec{A}\right)-\frac{1}{4\pi}\vec{H}\ \mathrm{rot}\,\delta\vec{A}+\frac{\vec{j}}{c}\delta\vec{A}\right]d\forall$$

Sendo:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\,\delta\vec{A}\right)=\vec{E}\left(\frac{\partial}{\partial t}\delta\vec{A}\right)+\left(\delta\vec{A}\right)\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\left(\vec{H}\wedge\delta\vec{A}\right)=\left(\delta\vec{A}\right)\mathrm{rot}\vec{H}-\vec{H}\,\mathrm{rot}\left(\delta\vec{A}\right)$$

vem, usando o teorema de Gauss-Ostrogadsky:

$$\delta_A L = \iiint_\forall \left(\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi}\text{rot}\vec{H} + \frac{\text{j}}{c} \right) \delta \vec{A} d\forall +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \oiint \left(\vec{H} \wedge \delta \vec{A} \right) dS - \frac{1}{4\pi c} \iiint_\forall \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{E} \delta \vec{A} \right) d\forall$$

O segundo termo é nulo, pois o volume é infinito. Quanto ao terceiro:

$$0 = \delta_A S = \int_a^b (1^\text{o}\,\text{termo})dt - \frac{1}{4\pi c}\int_a^b \frac{d}{dt}\left[\iiint_\forall \left(\vec{E}\delta\vec{A} \right) d\forall \right] dt =$$

$$\int_a^b (1^\text{o}\,\text{termo})dt - \frac{1}{4\pi c}\iiint_\forall \left[\vec{E}(\vec{r};b).\delta\vec{A}(\vec{r};b) - \vec{E}(\vec{r};a).\delta\vec{A}(\vec{r};a) \right] d\forall = 0$$

Este segundo termo é nulo, pois $\delta \vec{A} = 0$ (condições de contorno). Então o primeiro termo também será nulo. Mas, se este é nulo, e $\delta \vec{A}$ é arbitrário, ter-se-á necessariamente:

$$\boxed{\text{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{j}}$$

que é a quarta e última equação de Maxwell.

****